SISTEM PERSAMAAN LINEAR ATAS RING KOMUTATIF

Titi Udjiani SRRM
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof Soedarto, S.H, Semarang 50275

Abstract. Linear systems equations over commutatif ring are linear systems equations with the coeffici-ents of these equations are elements from commutatif ring. This paper discusses about basic theorems on solution of linear systems equations over commutatif ring. The basic theorems will be found by using characteristic of ideal ,annihilator and rank of coefficient matrices of linear systems equations over commutatif ring. The ideal is generated by minors of coefficient matrices of linear systems equations over commutatif ring. Computing the annihilator of ideal we get the rank of coefficient matrices of linear systems equations over commutatif ring.

Key words: ideal, annihilator, rank.

1. PENDAHULUAN

Salah satu masalah penting dalam matematika adalah menyelesaikan Sistem persamaan linear. Karena lebih dari 75 % dari masalah matematika yang dijumpai dalam aplikasi ilmiah maupun industri melibatkan penyelesaian sistem persamaan linear hingga tahap tertentu. Dengan menggunakan metode metode matematika modern, seringkali kita dapat mereduksi suatu masalah yang rumit menjadi sistem persamaan linier. Sistem linier seringkali muncul dalam penerapan bidang bidang seperti perdagangan, ekonomi, sosial, ekologi, demografi, genetika, elektronika , teknik dan fisika [4].

Oleh karenanya dengan melihat kondisi diatas maka pemahaman atau pembahasan mengenai sistem persamaan linear harus terus menerus diupayakan peningkatannya. Tulisan ini membahas salah satu jenis sistem persamaan linear yaitu sistem persamaan linier dengan koefisien koefisiennya anggota dari ring komutatif. Pembahasan dibatasi pada penyelesaian atau solusi dari sistem persamaan linear.

2. SISTEM PERSAMAAN LINEAR ATAS RING KOMUTATIF

Diberikan Sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Sistem persamaan linear (2.1) merepresentasikan m buah persamaan linier dalam n buah variabel tak diketahui $x_1, x_2, \dots, x_n$. Koefisien a_{ij} dan konstanta b_i adalah elemen elemen dari ring komutatif R.

Sistem persamaan linear (2.1) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

$$AX = B \qquad (2.2)$$

dengan $A = (a_{ij}) \in M_{mxn}(R)$
$B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^t \in R^m$
$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in R^n$

Persamaan (2.1) atau (2.2) dikatakan mempunyai solusi di R^n , jika ada vektor $\xi \in R^n$ sedemikian sehingga $A\xi = B$.

Jika B = O, maka sistem persamaan linear A X = O disebut sistem persamaan linear homogen . Sistem persamaan linear homogen selalu mempunyai solusi, paling sedikit mempunyai satu solusi yaitu $\xi = O = (0,0,\dots,0)^t \in R^n$.

Solusi $\xi = O$ disebut solusi trivial dari AX=O. Solusi $\xi \in R^n$ disebut solusi non trivial dari AX=O jika $\xi \neq O$ dan $A\xi = O$.

Pembahasan pertama akan membahas mengenai teorema terkenal dari N.Mc.Coy mengenai syarat perlu dan cukup sistem persamaan linear homogen AX=O mempunyai solusi non trivial.

Teorema 2.1 (Th. N.Mc.Coy) [4]
Diketahui $A \in M_{mxn}(R)$
Sistem persamaan linear Homogen AX= O mempunyai solusi non trivial jika dan hanya jika rk (A) $\langle$ n.

Bukti.
Diketahui sistem persamaan linear homogen AX=O mempunyai solusi non trivial artinya jika $\xi \in R^n$ adalah solusi dari Sistem persamaan linear homogen maka $\xi \neq O$. Berarti bahwa terdapat koordinat dari ξ misalnya $[\xi]_k \neq 0$ (2.3)

* Jika m $\langle$ n.
Menurut teorema 4.11 [4], diketahui bahwa rk (A) $\leq$ min {m,n}. Sehingga karena m $\langle$ n maka rk (A) $\leq$ m $\langle$ n.

* Jika $m \geq n$
Misal $\Delta(i_1, ..., i_n; 1, ..., n)$ adalah minor berukuran (nxn) dari A. Diambil matriks permutasi $P \in Gl(m,R)$ sedemikian sehingga PA mempunyai baris baris i_1, ... ,i_n dari matriks A sebagai n baris pertamanya.
Jadi Row $_1$(PA) = Row $_{i1}$(A),
Row $_2$(PA) = Row $_{i2}$ (A),
$\vdots$
Row $_n$(PA) = Row $_{in}$ (A).

Sehingga PA dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$PA=\begin{bmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 n} \\ \vdots & & & \\ a_{i_n 1} & a_{i_n 2} & \cdots & a_{i_n n} \\ & ----------- & & \\ & * & & \end{bmatrix}$$

berukuran mxn, $m \geq n$.

Kemudian dibentuk

$$D=\begin{bmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_n 1} & a_{i_n 2} & \cdots & a_{i_n n} \end{bmatrix}$$

adalah kemungkinan-kemungkinan dari n baris A dan Δ = det (D) = $\Delta(i_1, ..., i_n; 1, ..., n)$.

Diketahui bahwa $A\xi$=O dan D adalah kemungkinan kemungkinan dari n baris A maka $D\xi$ = O.

Selanjutnya $\Delta\xi$ = det (D) ξ . Berdasarkan (teorema 2.20,[4]) bahwa det(D) = (adj D) D maka $\Delta\xi$ = (adj D) $D\xi$. Sehingga $\Delta\xi$=O. Berarti untuk setiap k dari ξ berlaku

$$\Delta[\xi]_k = O \qquad (2.4)$$

Selanjutnya karena $\Delta(i_1, ..., i_n; 1, ..., n)$ adalah sebarang minor berukuran (nxn) dari A dan menggunakan persamaan (2.4) maka $[\xi]_k \in Ann_R(I_n(A))$.

Berdasarkan (2.3) $[\xi]_k \neq 0$ maka $Ann_R(I_n(A)) \neq (0)$. Akibatnya dengan menggunakan (definisi 4.10,[4]) bahwa rk(A) = maks $\{t \mid AnnR\, It(A))=(0)\}$, maka rk(A) $\langle$ n. ■

Selanjutnya jika diketahui rk(A) $\langle$ n. Misalnya rk(A) = r $\langle$ n.

Jika r = m $\langle$ n maka kita dapat menambah beberapa persamaan dengan koefisien nol pada persamaan (2.1), sehingga diperoleh sistem persamaan linear homogen yang baru sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

Untuk membuktikan bahwa Sistem persamaan linear homogen AX=O mempunyai solusi non trivial dapat dibuktikan dengan menunjukkan bahwa sistem persamaan linear homogen (2.5) mempunyai solusi non trivial. Artinya terdapat $\xi \neq O \in R^n$ sedemikian sehingga memenuhi persamaan (2.5).

Karena $I_t((\frac{A}{O}) = I_t(A)$, dengan O_{pxn} adalah matriks Nol berukuran pxn , p=n-m , $t \in Z$; maka rk(A) = rk$(\frac{A}{O})$.

Jadi dengan mengganti persamaan (2.1) dengan persamaan (2.5) dan berdasarkan pada (teorema 4.11,[4]), tetap dapat diasumsikan bahwa $r \leq \min\{m,n\}$.

Karena rk(A)=r maka $Ann_R(I_{r+1}(A)) \neq (0)$. Diambil $a \neq 0$ dan $a \in Ann_R(I_{r+1}(A))$. Jika r=0 maka $a \in Ann_R(I_1(A))$. Dilain pihak $\xi = (a, ..., a)^t \in R^n$ adalah solusi non trivial dari AX=O. Jadi dapat diasumsikan bahwa $1 \leq r \langle min\{m,n\}$.

Karena rk(A)=r dan rk(A)=maks$\{ t | Ann_R(I_t(A)) = (0)\}$ maka $Ann_R(I_r(A))=(0)$. Artinya ada minor (rxr) dari A yaitu $\Delta(i_1, ... ,i_r ;j_1, ...,j_r)$ dari A sedemikian sehingga $a\Delta \neq 0$.

Kita dapat menukar atau mengganti baris baris $i_1, ... ,i_r$ dan kolom kolom $j_1, ...,j_r$ dari A menjadi r baris pertama dan r kolom pertama dari matriks baru (2.5), dengan mengalikan pada sisi kiri dan kanan dari A dengan matriks permutasi $P \in Gl(m,R)$ dan $Q \in Gl(n,R)$ sedemikian sehingga

PAQ = $\begin{bmatrix} C & * \\ * & * \end{bmatrix}$ dengan $C \in M_{rxr}(R)$ dan det (C)= $\Delta(i_1, ... ,i_r ;j_1, ...,j_r)$.

Misalkan persamaan (PAQ)X=O mempunyai solusi non trivial $\beta \in R^n$ maka (PAQ) β =O . Karena P adalah matriks invertible maka $P^{-1}(PAQ)\beta = O$; $A(Q\beta) = O$; $A\xi = O$. Selanjutnya karena $\xi = \beta Q$, sementara $\beta \neq O$ dan $P \in Gl(m,R)$ maka $\xi \neq O$. Terbukti bahwa AX = O mempunyai solusi non trivial ξ.

Akibat 2.2 [4]
Suatu sistem persaman linier homogen mempunyai solusi non trivial jika banyaknya persamaan lebih kecil dari pada banyaknya varabel yang tidak diketahui.

Bukti.
Diambil sistem persaman linier homogen AX=O dengan banyaknya persamaan lebih kecil dibandingkan banyaknya variabel yang akan dicari. Artinya jika $A \in M_{mxn}(R)$ maka $m < n$.
Dengan menggunakan (teorema 4.11,[4]) maka rank(A) $\leq r \langle min\{m,n\} = m < n$.
Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 1 terbukti bahwa sistem persaman linier homogen mempunyai solusi non trivial. ■

Teorema 2.3 [4]
Jika $A \in M_{nxn}(R)$ dengan det (A) $\in$ U(R) dengan U(R) adalah himpunan elemen elemen unit di R, maka untuk suatu B = $(b_1, ..., b_n)^t \in R^n$, persamaan AX=B mempunyai solusi tunggal $\xi = (y_1, ..., y_n)^t$ dengan
$y_j = (\det(A))^{-1}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

untuk setiap j = 1, 2, ...,n.

Bukti.
Diambil $\xi = (y_1, ..., y_n)^t$
dengan $y_j = (\det(A))^{-1}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

untuk setiap j = 1, 2, ...,n.
Karena det $(A) \in U(R)$ maka det(A) *invertible* sehingga
$\det(A)y_j =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b_i cof_{ij}(A)$$

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} cof_{i1}(A) b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} cof_{in}(A) b_i \end{bmatrix} = adj(A)\, B$$

det(A) ξ = adj(A) B

Karena det(A)In=adj(A)A maka adj(A) A ξ=adj(A) B. Karena det(A)$\in$U(R) maka adj(A) *invertible*, sehingga Aξ=B. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa ξ tunggal. Diandaikan ξ' adalah solusi lain dari AX=B, maka Aξ'=Aξ=B; A(ξ' - ξ)=O. Karena A *invertible* maka (ξ' - ξ) = O dan $\xi' = \xi$. ■

Dari teorema diatas dapat disimpulkan bahwa jika A *invertible* maka AX=B mempunyai solusi tunggal untuk suatu B$\in R^n$. Teorema berikut akan menjelaskan syarat perlu suatu Sistem persamaan linear AX=B mempunyai solusi dengan $A_{mxn}(R)$ dan B$\in R^m$.

Teorema 2.4 [4]
Diketahui A$\in M_{mxn}(R)$. Jika AX=B mempunyai solusi maka $I_t(A|B)=I_t(A)$, untuk setiap t$\in$ Z.

Bukti.
Jika m$\rangle$n maka kita dapat menambah variabel variabel baru $x_{n+1}, \ldots, x_m$ dengan koefisien nol pada persamaan (2.1), sehingga diperoleh Sistem persamaan linear baru $A'X' = B$ sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

Sehingga $\xi = (y_1, ..., y_n)^t \in R^n$ dikatakan solusi dari persamaan (2.1) jika dan hanya jika $\xi' = (y_1, ..., y_n, 0, ..., 0)^t \in R^m$ adalah solusi dari persamaan (6), dan untuk setiap t$\in$ Z berlaku $I_t(A) = I_t(A')$ dan $I_t(A|B) = I_t(A'|B)$.

Oleh karenanya jika $I_t(A'|B) = I_t(A')$ untuk setiap t$\in$ Z maka $I_t(A|B) = I_t(A)$. Artinya dengan menggunakan persamaan (6), secara sama tanpa mengurangi keumumannya berlaku juga untuk m$\le$n.

Karena A dan $(A|B)$ sama sama mempunyai m baris,maka $I_t(A) = I_t(A|B) = (0)$ jika t$\rangle$min {m,n} =m, sehingga kita dapat mengasumsikan bahwa $1 \le t \le m = \min\{m, n\}$

Menurut definisi $I_t(A) \subseteq I_t(A|B)$. Selanjutnya tinggal dibuktian bahwa $I_t(A|B) \subseteq I_t(A)$. Diambil $\Delta(i_1, \ldots, i_t; j_1, \ldots, j_{t-1}, n+1)$=minor berukuran txt dari $(A|B)$ yang memuat B pada kolom terakhirnya dengan $1 \le i_1 < \ldots < i_t \le m$ dan $1 \le j_1 < \ldots < j_{t-1} \le n \in I_t(A|B)$

Akan dibuktikan bahwa $\Delta(i_1, \ldots, i_t; j_1, \ldots, j_{t-1}, n+1) \in I_t(A)$

Misal $\xi = (x_1, ..., x_n)^t \in R^n$ adalah solusi dari AX = B. Dengan menggunakan (definisi 2.10,[4]) diperoleh $x_1\, Col_1(A) + \ldots + x_n\, Col_n(A) = B$ di R^m, sehingga

$\Delta(i_1, \ldots, i_t; j_1, \ldots, j_{t-1}, n+1)$

$$= \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_{t-1}} & x_1 a_{i_1 1} + \ldots + x_n a_{i_1 n} \\ a_{i_2 j_1} & \vdots & a_{i_2 j_1} & x_1 a_{i_2 1} + \ldots + x_n a_{i_2 n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i_t j_1} & \cdots & a_{i_t j_{t-1}} & x_1 a_{i_t 1} + \ldots + x_n a_{i_t n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_{t-1}} & a_{i_1 k} \\ a_{i_2 j_1} & \cdots & a_{i_2 j_{t-1}} & a_{i_2 k} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_t j_t} & \cdots & a_{i_t j_{t-1}} & a_{i_t j_k} \end{bmatrix} \in I_t(A).$$

■

Teorema 2.5 [4]
Diketahui $A \in M_{mxn}(R)$ dengan $m \leq n$, rk (A) = m dan $B \in R^m$. Jika terdapat ideal U di R dan sebuah elemen reguler $z \in R$ sedemikian sehingga U $I_m(A|B)^* \subseteq R_z \subseteq U\, I_m(A)$ maka sistem persamaan linear AX = B mempunyai solusi. Dengan $I_m(A|B)^*$ adalah ideal di R yang dibangun oleh minor minor berukuran mxm dari (A| B) yang memuat kolom B.

Bukti.
Karena rk(A) = m maka $Ann_R(I_m(A)) = (0)$. Dengan kata lain $I_m(A) \neq (0)$. Jadi terdapat minor berukuran mxm dari A yang $\neq 0$. Misal $\Delta = \Delta(i, \dots, m; j_1, \dots, j_m)$ adalah minor mxm $\neq (0)$ dari A dengan $1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n$.Perhatikan submatriks berukuran mxm dari A sebagai berikut.

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_m} \end{bmatrix}$$ maka det $(\overline{A})$ = $\Delta \neq 0$ dan

$$\Delta \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \det(\overline{A}) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = (\overline{A})(\operatorname{adj} \overline{A}) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \qquad (2.7)$$

Dilain pihak

$$(\operatorname{adj} \overline{A}) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m} b_j cofj_1(\overline{A}) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} b_j cofj_m(\overline{A}) \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

Selanjutnya dibentuk

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m} b_j cofj_1(\overline{A}) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} b_j cofj_m(\overline{A}) \end{bmatrix} \in R^m.$$

Sehingga untuk setiap i = 1,2, .., m berlaku

$$c_i = \sum_{j=1}^{m} b_j cof_{ji}(\overline{A}) = \begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & b_i & \cdots & a_{1j_\infty} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mj_1} & \cdots & b_m & \cdots & a_{mj_\infty} \end{vmatrix} \in I_m(A|B)^* \qquad (2.9)$$

Dengan menggunakan persamaan (7),(8), dan (9) diperoleh :

$$\Delta \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j_1} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mj_1} & \cdots & b_m & \cdots & a_{mj_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

Dengan $\Delta b_i = \sum_{u=1}^{m} a_{ij_u} c_u$, untuk setiap i = 1,2, ..., m.
Selanjutnya $y_i, \dots, y_n$ didefinisikan sebagai berikut :

$$y_v = \begin{cases} 0; v \in \{1,\dots n\} - \{j_1,\dots,j_m\} \\ c_i; v = j_i; i = 1,2,\dots,m \end{cases} \in I_m(A|B)^*,$$

untuk setiap v = 1, ...,n.
Sehingga

$$\sum_{v=1}^{n} a_{iv} y_v = a_{ij_1} y_{j_1} + \dots + a_{ij_m} y_{j_m} = a_{ij_1} c_1 + \dots + a_{ij_m} c_m = \Delta b_i$$, untuk setiap i = 1,...,m. Jadi $b_i = \sum_{v=1}^{n} a_{iv} y_v$ untuk setiap i = 1,...,m dan $y_i, \dots, y_n \in I_m(A|B)^*$.

Misal $\Delta_1, \dots \Delta_p$ adalah minor minor berukuran mxm dari A yang $\neq 0$. Maka untuk setiap k=1, ...,p terdapat skalar $\{y_{kv} \in R$, v = 1,...n$\} \subseteq I_m(A|B)^*$ sedemikian sehingga

$$\Delta_k b_i = \sum_{v=1}^{n} a_{iv} y_{kv} \quad \forall\, i = 1,\dots,m. \qquad (2.10)$$

Sudah diketahui bahwa U $I_m(A|B)^* \subseteq R_z \subseteq UI_m(A)$ dan karena $\Delta_1,... \Delta_p$ membangun ideal $I_m(A)$, maka didapat elemen reguler $z=\sum_{k=1}^{p} q_k \Delta_k$ dengan $q_1,...q_p \in U$.

Selanjutnya persamaan (2.10) menjadi

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{v=1}^{n} a_{iv} q_k y_{kv} = \sum_{k=1}^{p} q_k \sum_{v=1}^{n} a_{iv} y_{kv}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} q_k \Delta_k b_i$$

$$= zb_i,\ \forall i = 1,...,m . \qquad (2.11)$$

Karena untuk setiap v = 1,...,n berlaku $\sum_{k=1}^{p} q_k y_{kv} \in UI_m(A|B)^* \subseteq R_z$, maka $\sum_{k=1}^{p} q_k y_k = r_v z$, dengan $r_v \in R$. Sehingga persamaan (2.11) menjadi

$$\sum_{v=1}^{n} a_{iv} r_v z = z \sum_{v=1}^{n} a_{iv} r_v$$

$$= zb_i,\ \forall i = 1,...,m.$$

Karena z elemen reguler dari R maka $\sum_{v=1}^{n} a_{iv} r_v = b_i,\ \forall i = 1,...,m$. Dengan kata lain $\xi = (r_1,...,r_n)^t \in R^n$ adalah solusi dari AX = B.

■

Akibat 2.6

Jika $A \in M_{mxn}(R)$ dengan $I_m(A) = R$ maka untuk suatu $B \in R^m$, sistem persamaan linear AX=B mempunyai solusi.

Bukti.

Karena $I_m(A) = R$ maka rk(A) = m.

Untuk suatu $B \in R^m$ berlaku $RI_m(A|B)^* \subseteq R_z \subseteq RI_m(A)$

Karena 1 adalah elemen reguler dari R maka dengan menggunakan Teorema 2.5 terbukti bahwa Sistem persamaan linear AX = B mempunyai solusi. ■

Contoh

Diketahui sistem persamaan linear non homogen dengan koefisien koefisien anggota ring komutatif R = Z/4Z sebagai berikut.

$$x + y + z = 1$$
$$2x + y + 2z = 2$$
$$x + 2z = 3$$

Akan diselidiki apakah sistem persamaan linear non homogen diatas mempunyai penyelesaian.

Dari sistem persamaan linear non homogen diatas diperoleh

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_{3x3}(R) \text{ dan } B= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in R^3$$

dengan R = Z/4Z.

Elemen 1 dan 3 adalah elemen reguler dari R =Z/4Z

$R_1=\{ r_i 1 \mid r_i \in Z/4Z \}= Z/4Z$

$R_2=\{ r_i 3 \mid r_i \in Z/4Z \}= Z/4Z$

$I_3(A)$=Ideal yang dibangun oleh minor minor berukuran 3x3

$$= \{n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \mid n \in Z\} = \{Z/4Z\}$$

$Ann_R (I_3(A)) = \{ x \in Z/4Z \mid xm = 0$, untuk setiap $m \in I_3(A)\} = (0)$.

Rank A = 3.

$$I_3(A|B)^* = \{n_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} + n_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + n_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}, n_1,n_2,n_3 \in Z\} = Z/4Z$$

Diambil U = Z/4Z dan elemen reguler 1 maka berlaku U $I_3(A|B)^* \subseteq R_1 \subseteq U I_3(A)$.

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 2.5 terbukti bahwa sistem persamaan linear diatas mempunyai solusi.

$|A| = 3 \in U(R)$; $(|A|)^{-1} = 3$.

$$y_1 = (|A|)^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3.1 = 3$$

$$y_2 = (|A|)^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3.\ 0 = 0$$

$$y_3 = (|A|)^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.2 = 2$$

$\xi = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ adalah penyelesaian dari sistem persamaan linear diatas.

3. PENUTUP

Konvers dari Teorema 2.4 tidak berlaku untuk ring komutatif R artinya jika $I_t(A|B) = I_t(A)$, untuk setiap $t \in Z$, tidak menjamin bahwa sistem persamaan linear mempunyai solusi. Akan tetapi jika R adalah field maka konvers dari Teorema 2.4 berlaku, sebab jika $I_t(A|B) = I_t(A)$, untuk setiap $t \in Z$, maka $rk(A|\ B) = rk(A)$. Dan berdasarkan [1] maka sistem persamaan linier mempunyai penyelesaian $rk(A|\ B) = rk(A)$.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Howard Anton, alih bahasa oleh Pantur Silaban (1995), *Aljabar Linier elementer*, Erlangga.

[2]. http:/en.wikipedia.ovg/wiki/commutative_ring, diakses terakhir tanggal 8 Desember 2006.

[3]. Steven J. Leons (1998), *Linear Algebra with Applications* Prentice- Hall, Inc.

[4]. William C. Brown (1993), *Matrices over Commutative Rings*, Marcel Dekker, Inc. New York.

[5]. www.ajasto.fi/images/casio/pdf/A08_01_simulataneous.pdf, Solving System of Linear Equation, diakses terakhir tanggal 8 Desember 2006.